1

pour les pages 1.1 à 1.4 : respecter la mise en page

Le champ réel

Le présent ouvrage prend comme point de départ les propriétés des nombres réels établies en [mm2] et entièrement résumées par la riche information

$\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant$ est un champ totalement ordonné.

1 Le champ des nombres réels

Commençons par rappeler ce que signifie "$\mathbb{R}, +, \cdot$ est un champ".

- la notation $\mathbb{R}, +, \cdot$ indique que l'ensemble $\mathbb{R}$ est muni des lois $+$ et $\cdot$, internes et partout définies.
- $\mathbb{R}, +, \cdot$ est un champ

signifie

- $\mathbb{R}, +$ est un groupe commutatif
- $\cdot$ est commutative et associative
- $\mathbb{R}_0, \cdot$ est un groupe commutatif
- $\cdot$ distribue $+$

La structure de champ de $\mathbb{R}$ dote automatiquement celui-ci d'autres lois avec lesquelles tu es déjà familiarisé :

1. prendre l'opposé d'un réel
2. soustraire
3. prendre l'inverse
4. diviser
5. élever à une puissance à exposant naturel
6. élever à une puissance à exposant entier

ou encore, formellement, les lois

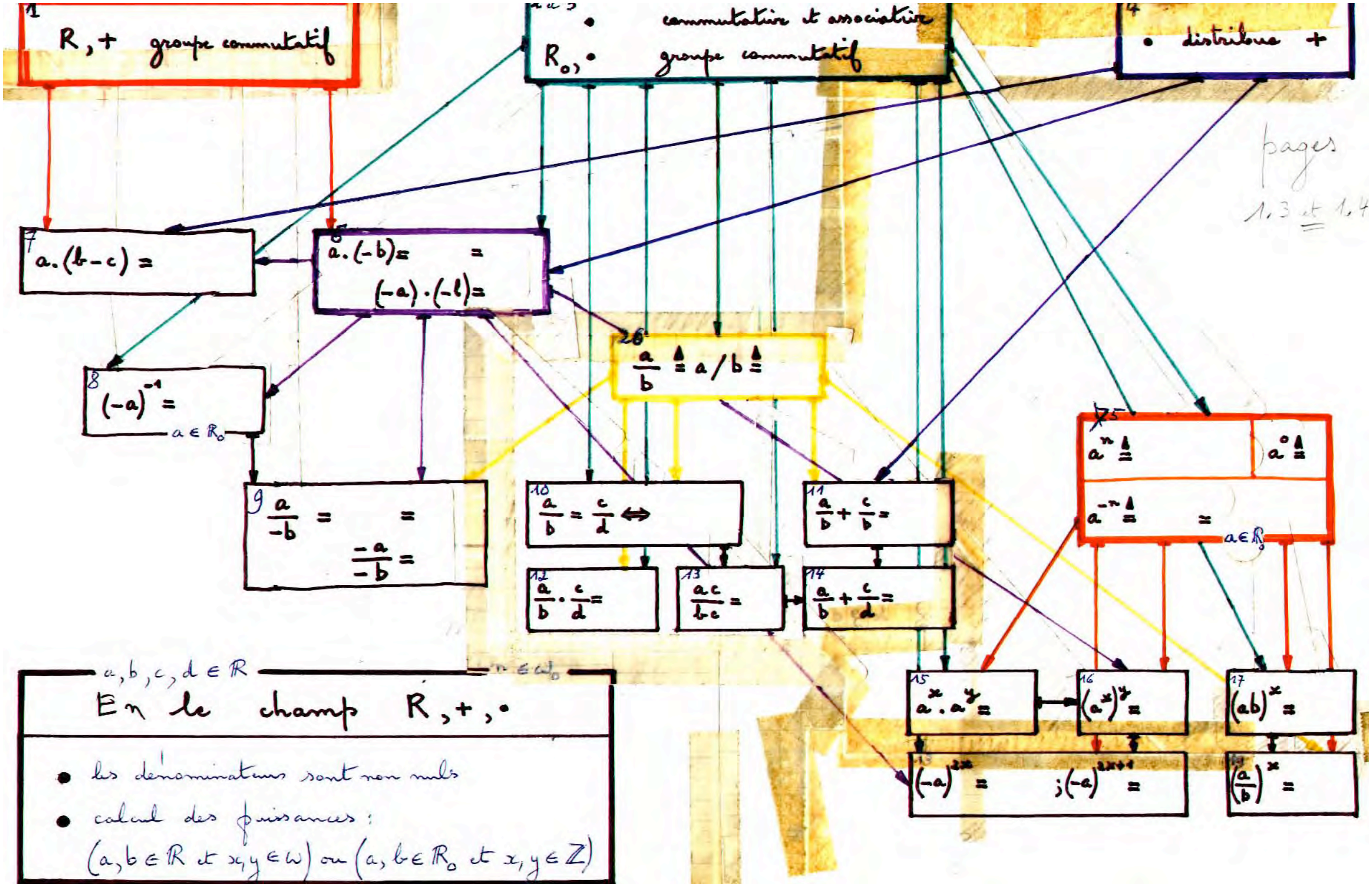
1. $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto -x$
2. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto x-y$

etc.

EX1 Présente aussi les autres lois comme des fonctions.

L'addition, la multiplication et les lois rappelés ci-dessus sont liées par des propriétés harmonieuses. L'organigramme inachevé des pages suivantes t'aidera à retrouver ces propriétés à partir de la structure de champ de $\mathbb{R}$. Familières depuis longtemps les règles de calcul en les groupes $\mathbb{R},+$ et $\mathbb{R}_0,\cdot$ n'y figurent pas.

EX2 Complète l'organigramme. Les flèches de couleur t'indiquent quelles sont les propriétés à utiliser pour retrouver les formules ou définitions que tu aurais oubliées, et ceci par la voie adoptée dans [mm 2]. Mais d'autres démonstrations sont possibles.


1 R, + groupe commutatif
2 · commutative et associative
R₀, · groupe commutatif
4 · distributive +
pages 1,3 et 1,4
7 a.(b−c) =
5 a.(−b)= =
(−a).(−b)=
6 a/b ≜ a/b ≜
8 (−a)^−1 =
a ∈ R₀
9 a/−b = =
−a/−b =
10 a/b = c/d ⇔
11 a/b + c/b =
12 a/b · c/d =
13 ac/bc =
14 a/b + c/d =
25 a^n ≜
a^0 ≜
a^−n ≜ =
a ∈ R₀
15 a^x . a^y =
16 (a^x)^y =
17 (ab)^x =
(−a)^2x = ; (−a)^2x+1 =
(a/b)^x =
a, b, c, d ∈ R
n ∈ ω₀
En le champ R, +, ·
· les dénominateurs sont non nuls
· calcul des puissances :
(a, b ∈ R et x, y ∈ ω) ou (a, b ∈ R₀ et x, y ∈ Z)

Voici des exercices de calcul dans le champ réel.

Par commodité nous les avons groupés au début de ce chapitre, en les présentant d'une manière très progressive. Néanmoins, toute liberté t'est laissée en ce qui concerne l'ordre en lequel tu souhaites les aborder, ainsi que le moment.

Les lettres désignent des réels. Les dénominateurs sont non nuls. Les bases des puissances à exposant strictement négatif sont non nulles.
Les encadrés de couleur, à compléter, renvoient éventuellement à l'organigramme

EX 3 $\boxed{\cdot \text{ est commutative et associative}}$

$x \cdot 3y =$

$5x \cdot 8y \cdot 10x =$

$2{,}5 \times 78 \times 4 =$

$2xy \cdot 5xy^2 =$

$0{,}001 \times 281 \times 1000 =$

$\frac{19}{24} \times 7 \times \frac{8}{19} =$

EX 4 $\boxed{\cdot \text{ distribue } +}$

$a \cdot (b+c) =$

$(a+b) \cdot c =$

$(a+b) \cdot (c+d) =$

$(a+b+c) \cdot (2x+3y) =$

$5ab + 6ab =$

$(a+b)^2 =$

$(x+7)(x+2) =$

$(2a+3b+c)(a+5b+6c) =$

$5(6a+b) + 10(a+9b) =$

$\left(\frac{3}{4}x + y\right)\left(\frac{2}{3}x + 3y\right) =$

$(a+b)^3 =$

EX 5 $\boxed{a \cdot (-b) = \quad =}$

$(-a)(-b) =$

$(-2a)\,3x =$

$(-a)(-b)c(-d)f =$

$\boxed{a \cdot (b-c) =}$

$(4a-5)(-2a+3) =$

$(x+y)(x^2-xy+y^2) =$

$(3x+5)(-2x) - (-x+6)(x+3) =$

$(a+b)(a-b) =$

$(a-b)^3 =$

EX 6 $\boxed{ab + ac = a(b+c)}$

$7abc + 14bcd =$

$-25x^3y^2 + 30x^2y^3 =$

$12abc - 6ab + 3a =$

$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x^3 =$

$-8(a+b) + 5(a+b) = \ldots (a+b)$

$3a(a+b) - 2b(a+b) = (\quad)\cdot(\quad)$

$(x-y)^2 - (x-y) =$

$5(a-b)(c+d) - (a-b)(2c-d) =$

$a^2 + 2ab + b^2 =$

$a^2 - b^2 =$

$16x^2 - y^4 =$

EX7 $-25x^3y^2 + 30x^2y^3 = -5x^2y^2(5x-6y)$

$= 5x^2y^2(-5x+6y)$

$= xy(-25x^2y + 30xy^2)$

$= \dots$

$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x^3 = -\frac{x}{2}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{2}\right)$

$= \frac{x}{4}(-2 - x + 3x^2)$

$= \dots$

bleu = jaune

EX8

$\boxed{\frac{a}{b} = \qquad}$ $\quad$ $\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \qquad}$ $\quad$ $\frac{2x}{5y}\cdot\frac{5y}{8x} =$

$\boxed{\frac{ac}{bc} = \qquad}$ $\quad$ $\frac{a}{b}\cdot c =$ $\quad$ $\frac{2-x}{5-y}\cdot\frac{5-y}{8-x} =$

$\frac{425}{125} =$ $\quad$ $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} =$ $\quad$ $\frac{a^2-b^2}{a-b} =$

$\frac{18abc}{12bdc} =$ $\quad$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} =$ $\quad$ $\frac{5a-1}{a-1}\cdot\frac{a^2+1}{25a^2-1} =$

$\frac{75(a+b)c^2}{27(a+b)^2} =$ $\quad$ $\frac{48}{49}\cdot\frac{14}{27} =$ $\quad$ $\frac{a}{b}\cdot\frac{a-1}{b-1}\cdot\frac{b^2-1}{(a-1)^2} =$

EX9

$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \qquad}$ $\quad$ $\frac{7}{180} + \frac{1}{270} =$ $\quad$ $\frac{1}{12x^2y^3} + \frac{1}{18x^3y^2} =$

$\frac{25}{49} + \frac{10}{49} =$ $\quad$ $\frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3} =$ $\quad$ $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a^2-b^2} =$

$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \qquad}$ $\quad$ $\frac{3}{x} + \frac{5}{3x} =$ $\quad$ $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a^2+b^2} =$

EX10

$\boxed{\frac{a}{-b} = \qquad = \qquad}$ $\quad$ $\frac{-36x^2y}{-54xy^2} =$ $\quad$ $\frac{4x^2}{-3y^3}\cdot\frac{9xy}{3} =$

$\frac{-a}{-b} =$ $\quad$ $\frac{4x}{-y}\cdot\frac{-3}{x} =$ $\quad$ $\frac{x-3}{-3y}\cdot\frac{6y}{x-6} =$

EX11

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} =$ $\quad$ $\frac{a}{b} - \frac{c}{2+b} =$ $\quad$ $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)\frac{ab}{a+b} =$

$\frac{17}{225} - \frac{19}{24} =$ $\quad$ $\frac{a}{b} - \frac{c}{2b} =$ $\quad$ $\left(\frac{4}{x} - \frac{8}{x^2}\right)\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{8}\right)$

$a - \frac{b}{c} =$ $\quad$ $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) =$ $\quad$ $\frac{4}{x}\cdot\frac{8}{x^2} - \frac{x}{4}\cdot\frac{x^2}{8} =$

bleu = EX12 orange

$a^n \stackrel{\blacktriangle}{=}$; $a^0 =$	$a^{-n} \stackrel{\blacktriangle}{=}$	$(n \in \omega_0)$

$10^6 =$ $\quad$ $4^0 =$ $\quad$ $4^{-2} =$

$3^5 =$ $\quad$ $0^4 =$ $\quad$ $(-4)^{-2} =$

$(-4)^3 =$ $\quad$ $0^0 =$ $\quad$ $3^{-5} =$

$(-4)^6 =$ $\quad$ $0,01^5 =$ $\quad$ $(-3)^{-5} =$

$(-1)^{101} =$ $\quad$ $(-0,025)^3 =$ $\quad$ $(-10)^{-4} =$

Dans les exercices suivants : $\boxed{m, n \in \omega ; s, t \in \mathbb{Z}}$

EX13 $a^2 a^3 =$ $\quad$ $(a^2)^3 =$ $\quad$ $\frac{1}{a^s} = 1 \cdot (a^s)^{-1} = a^{-s}$

$\boxed{a^m a^n =}$ $\quad$ $\boxed{(a^m)^n =}$ $\quad$ $\boxed{\frac{a^s}{a^t} =}$

$a^{-2} a^{-3} =$ $\quad$ $(a^{-2})^3 =$ $\quad$ $\frac{(-5)^8}{(-5)^5} =$

$a^5 a^{-8} =$ $\quad$ $(a^{-2})^{-3} =$ $\quad$ $\frac{7^{-8}}{7^{-12}} =$

$\boxed{a^s a^t =}$ $\quad$ $\boxed{(a^s)^t =}$ $\quad$ $\left(\frac{3^{100}}{3^{98}}\right)^2 =$

$3^{-20} \cdot 3^{18} =$ $\quad$ $(10^{-3})^4 =$ $\quad$ $\frac{1}{0,001^{-3}} = 10^{\cdots}$

$(-2)^{20} \cdot (-2)^{-15} =$ $\quad$ $\left((-5)^2\right)^{-2} =$ $\quad$ $\frac{10^8}{100^6} = 10^{\cdots}$

EX14 $(ab)^4 =$ $\quad$ $\left(\frac{a}{b}\right)^3 =$ $\quad$ $\frac{1}{2} + 2^{-1} =$

$(ab)^{-3} =$ $\quad$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-5} =$ $\quad$ $10^{-5} + \frac{1}{10^3} =$

$\boxed{(ab)^n =}$ $\quad$ $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n =}$ $\quad$ $2^5 \cdot 7^2 \cdot 5^5 =$

$\boxed{(ab)^s =}$ $\quad$ $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^s =}$ $\quad$ $1000^{10} \cdot 10^{-20} =$

$(xyz)^5 =$ $\quad$ $\left(\frac{-5}{7}\right)^4 =$ $\quad$ $4^{10} \cdot 10^{-12} \cdot 25^{10} =$

$(4x^2y^{-3})^{-4} =$ $\quad$ $\left(\frac{1}{10}\right)^{-5} =$ $\quad$ $0,25^3 \cdot 10^6 \cdot 4^3 =$

EX15

$(-2)^{-1} =$ $\quad$ $(-1000)^{-1} =$ $\quad$ $(-0{,}25)^{-1} =$

$\boxed{(-r)^{-1} =}$ $\quad$ $(-10^6)^{-1} =$ $\quad$ $\left(-\frac{7}{8}\right)^{-1} =$

EX16

$(-a)^3 =$ $\quad$ $(-a)^{-3} =$ $\quad$ $a^2(-a)^3a^4 =$

$(-a)^4 =$ $\quad$ $(-a)^{-4} =$ $\quad$ $a^{-4}(-a)^{-2}(-a)^5 =$

$(-a)^5 =$ $\quad$ $(-a)^{-5} =$ $\quad$ $a^2(-b)^{-4}(-a)^3b^2 =$

$\boxed{(-a)^{2n} =}$ $\quad$ $\boxed{(-a)^{2s} =}$ $\quad$ $2^4(-5)^3(-2)^6 5^8 =$

$\boxed{(-a)^{2n+1} =}$ $\quad$ $\boxed{(-a)^{2s+1} =}$ $\quad$ $(-4)^{-10} 25^{-8}(-4)^3(-25)^2 =$

$(-2)^7 =$ $\quad$ $(-2)^{-5} =$ $\quad$ $0{,}25^{-5} \cdot 5^2 \cdot 4^{-5} \cdot (-5)^3 =$

EX17

$(x^2-2x+3)^2 =$

$(a+b+c+d)^2 =$

$(x-y)(x+y) =$

$(x-y)(x^2+xy+y^2) =$

$(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) =$

$(x-y)(\quad \dots \quad) = x^{n+1} - y^{n+1}$

$a^7 - b^7 =$

$32a^5 - b^5 =$

$10^{-4}a^4 - b^4 =$

$\frac{1}{2}(1-p)^2 + \frac{1}{2}(1-p)p =$

$\frac{1}{2n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)x + \left(1-\frac{1}{n}\right)(1-x) + \frac{1}{2n} =$

$a^2 + a^{-2} =$

$(a^{-2}+a^{-3})(a^{-2}-a^{-3}) =$

$\frac{a-b}{a^3-b^3} =$

$\frac{4a^2-b^2}{8a^3-b^3} =$

$\frac{(x-1)2x-(2x+1)}{(x-1)^2} =$

$\frac{a(a-1)}{b(b-1)} + \frac{(b-a)a}{b(b-1)} =$

$\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{1-x} =$

$\frac{1}{x} - \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2x^2} =$

$\frac{2x}{x^2-y^2} + \frac{y-3}{(x-y)^2} =$

$\frac{1}{\frac{1}{a}-1} =$

$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}} =$

2 Division

Une des lois présentées en page 2 est la division. En voici la définition ... que tu avais sans doute trouvée.

1 La fonction $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto x/y$ est la division des nombres réels.

x/y ou $\dfrac{x}{y}$ est le rapport de x et y ou le quotient de x par y

Immédiatement, $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}_0$:

$\boxed{\text{quotient } q \text{ de } a \text{ par } b} \; = \; \boxed{\text{réel } q \text{ tel que } a = bq}$

EX 18 Le quotient de 3 par 10 est $3/10$, ou encore $0,3$

EX 19 Le quotient de 2,1 par 15,75 est $2,1/15,75$, ou encore $1,333333...$

EX 20 Calcule

$15.832/8$	$0,0001/0,0000001$
$3/2,25$	$-4^{56}/4^{60}$
$-\frac{2}{3}/\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{4}/-5,097$
$-\frac{144}{13}/-\frac{60}{52}$	$10^{-8}/(-10)^{10}$

EX 21 Présente une écriture décimale de ces quotients.

EX 22 La division est une fonction $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$. Pourquoi ne l'a-t-on pas définie comme une fonction $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$?

EX 23 <u>Si</u> $a \in \mathbb{R}$ et $b = 0$

<u>Alors</u>

ou bien $a \neq 0$	ou bien $a = 0$
et $\{q \in \mathbb{R} \mid a = bq\} =$	et $\{q \in \mathbb{R} \mid a = bq\} =$

EX 24 La division est une loi partout définie dans $\mathbb{R}_0$. Est-elle commutative, associative, admet-elle un élément neutre ?

EX 25

groupe com. $\mathbb{R}, +$	groupe com. $G, *$	groupe com. $\mathbb{R}_0, \cdot$
opposé de b	symétrique de b	
$-b$	$\bar{b}$	
$a - b \triangleq a + (-b)$	$a \bar{*} b \triangleq a * \bar{b}$	$a / b \triangleq$
soustraction	$G \times G \to G : (x, y) \mapsto x \bar{*} y$ est la <u>loi inverse</u> de la loi commutative $*$	
La soustraction est la loi inverse de l'addition.		

Complète ce tableau.

3 <u>Valeur absolue</u>

Les réels 3 et -3

$2{,}56$ et $-2{,}56$

$-4{,}3$ et $4{,}3$

ont un attribut en commun que n'ont pas les réels

3 et -4

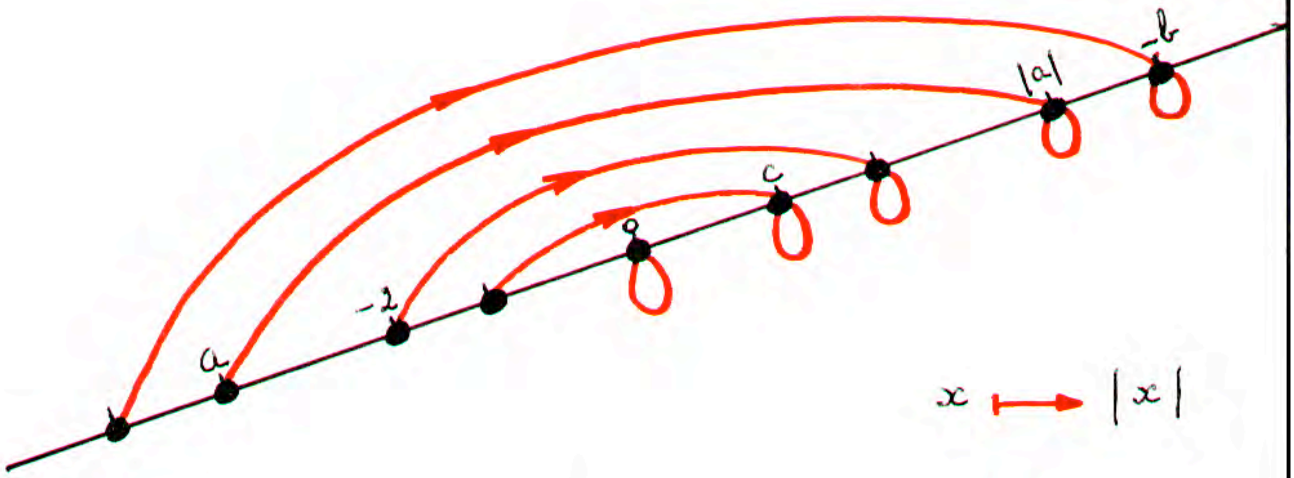
$2{,}46$ et $-2{,}56$

Des premiers, on dit qu'ils ont même <u>valeur absolue</u> :

la valeur absolue de 3 et de -3 est 3 ; elle est notée $|3|$ ou $|-3|$,

la valeur absolue de $4{,}3$ et de $-4{,}3$ est $4{,}3$; elle est notée $|4{,}3|$ ou $|-4{,}3|$,

etc.



EX26 Veux-tu donner une définition formelle de la valeur absolue d'un nombre réel ?

EX27 Marque les nombres compatibles avec ce graphe.

EX28 $|3,2| =$ $\qquad |-4,16| =$ $\qquad |0| =$

EX29 $\forall x \in \mathbb{R}$: $\qquad |x| = |-x| \in \mathbb{R}^+$

$|x| = 0$ $\quad$ ssi $\quad x = 0$

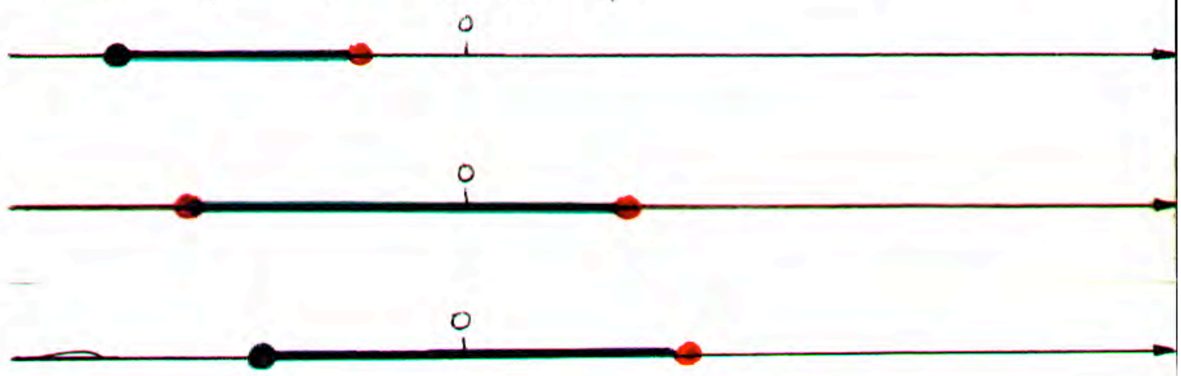
EX30 Si $r \in \mathbb{R}^+$, Alors $\quad |-r| =$

Si $r \in \mathbb{R}^-$, Alors $\quad |-r| =$

EX31 Pour toute partie P de $\mathbb{R}$: $\quad |P| \triangleq \{ |p| \mid p \in P \}$

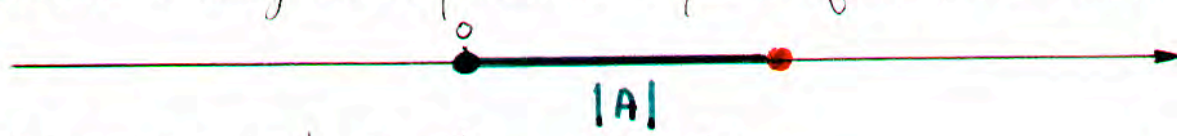
Calcule $|\mathbb{R}|$, $|\mathbb{Z}|$, $|\omega|$

EX32



Dessine l'image de ces parties de $\mathbb{R}$ par la fonction valeur absolue

EX33



Dessine A ; présente plusieurs solutions.

Voici la définition demandée en l'EX26 :

$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto |x|$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \ |x| = x$
$\forall x \in \mathbb{R}^- : \ |x| = -x$

est la <u>fonction valeur absolue</u>.

$|x|$ est la <u>valeur absolue</u> de x

Notant f, la fonction valeur absolue

EX34 $\quad f\,[-9\,;-6\,] =$ $\qquad f\,[-5\,;9\,[\ =$

$f\,[-9\,;5\,[\ =$ $\qquad f\,[-5\,;5\,[\ =$

EX35 $\quad f^{-1}\{5\} =$ $\qquad f^{-1}\{0\,;3\} =$

$f^{-1}\{5\,;6\} =$ $\qquad f^{-1}\{-6\,;7\,;0\,;2{,}5\} =$

EX36 $\quad \forall r \in \mathbb{R} : \qquad \# f^{-1}\{r\} \in \{0, 1, 2\}$

EX37 $\quad \forall r \in \mathbb{R} : \qquad \# f^{-1}\{r\} = 0$ ssi . . .

$\# f^{-1}\{r\} = 1$ ssi . . .

$\# f^{-1}\{r\} = 2$ ssi . . .

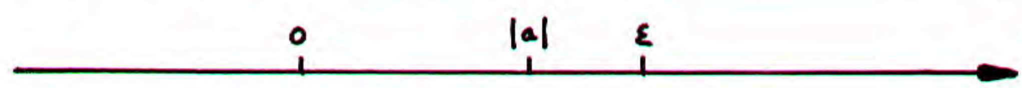
EX38 Pour tout ensemble fini F de réels

$\# f^{-1}F$ impair ssi $0 \in F$

EX39 $\quad \forall E \subset \mathbb{R} : \quad |E| = (E \cap \mathbb{R}^+) \cup \{-x \,\|\, x \in E \cap \mathbb{R}^-\}$

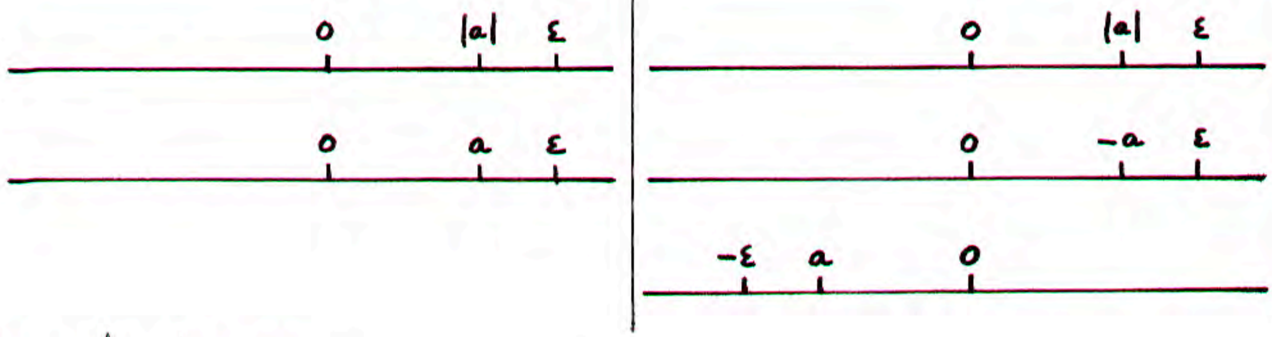
Comprends-tu cette formule barbare ?

On t'informe que $\qquad |a| < \varepsilon \qquad (a \in \mathbb{R}\,;\ \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+)$



Que peux-tu en conclure pour a ?

ou bien $a \geqslant 0$ | ou bien $a \leqslant 0$



Dans les deux cas :

$$-\varepsilon < a < \varepsilon$$

Nous avons démontré

1 en $\mathbb{R}$ — $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$

$$|a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a < \varepsilon$$

$$|a| \leqslant \varepsilon \iff -\varepsilon \leqslant a < \varepsilon$$

2 en $\mathbb{R}$ — $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$

$$|a-b| < \varepsilon \iff b-\varepsilon < a < b+\varepsilon \iff a-\varepsilon < b < a+\varepsilon$$

$$|a-b| \leqslant \varepsilon \iff b-\varepsilon \leqslant a \leqslant b+\varepsilon \iff b-\varepsilon \leqslant a \leqslant b+\varepsilon$$

Démontre et illustre par un dessin.

4 Le champ ordonné des nombres réels

Rappel:

$\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant$ est un <u>champ totalement ordonné</u>

signifie

1. $\mathbb{R}, +, \cdot$ est un <u>champ</u>

2. $\mathbb{R}, \leqslant$ est un <u>ordonné total</u>

3. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $a < b \iff a+c < b+c$

4. $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $a > 0$ et $b > 0 \Rightarrow ab > 0$

1 résume les propriétés essentielles de l'addition et de la multiplication des réels
2 présente l'ordre total naturel de $\mathbb{R}$
3 rappelle un lien fondamental entre l'ordre et l'addition
4 rappelle un lien fondamental entre l'ordre et la multiplication.

Ex 40

VRAI ou FAUX ?			
$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$:	$a<b$	$\Rightarrow$	$a+c<b+c$
$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$:	$a<b$	$\Rightarrow$	$a-c<b-c$
$\forall a,b \in \mathbb{R}$:	$a<b$	$\Rightarrow$	$-a<-b$
$\forall a,b \in \mathbb{R}$:	$a<b$	$\Rightarrow$	$-b<-a$
$\forall a,b \in \mathbb{R}$:	$0<a$ et $0<b$	$\Rightarrow$	$0<ab$
$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$:	$a<b$	$\Rightarrow$	$ac<bc$
$\forall a,b \in \mathbb{R} ; \forall c \in \mathbb{R}_0^+$:	$a<b$	$\Rightarrow$	$ac<bc$
$\forall a,b \in \mathbb{R} ; \forall c \in \mathbb{R}_0^-$:	$a<b$	$\Rightarrow$	$bc<ac$
$\forall a,b \in \mathbb{R}$:	$a<b$	$\Rightarrow$	$a^{-1}<b^{-1}$
$\forall a,b \in \mathbb{R}$:	$a<b$	$\Rightarrow$	$b^{-1}<a^{-1}$
$\forall a,b \in \mathbb{R}_0^+$:	$a<b$	$\Rightarrow$	$b^{-1}<a^{-1}$

Si la formule est vraie
Alors démontre-la ...
on recherche les références dans [mm 2]

Si la formule est fausse
Alors fournis un contre-exemple

Attention aux formules ET aux lettres quantifiées !

Dans quelles formules peux-tu remplacer $\Rightarrow$ par $\Leftrightarrow$?

EX41 Complète les formules en les faisant précéder par des quantificateurs tels qu'elles soient VRAIES :

...	$a < b$ et $c < d$	$\Rightarrow \quad a+c < b+d$
...	$a < b$ et $c < d$	$\Rightarrow \quad a-d < b-c$
...	$a < b$ et $c < d$	$\Rightarrow \quad ac < bd$
$\forall n \in \omega_0$, ...	$a < b$	$\Rightarrow \quad a^n < b^n$
$\forall n \in \omega_0$, ...	$a < b$	$\Rightarrow \quad b^{-n} < a^{-n}$

Dans quelles formules peux-tu remplacer $\Rightarrow$ par $\Leftrightarrow$?

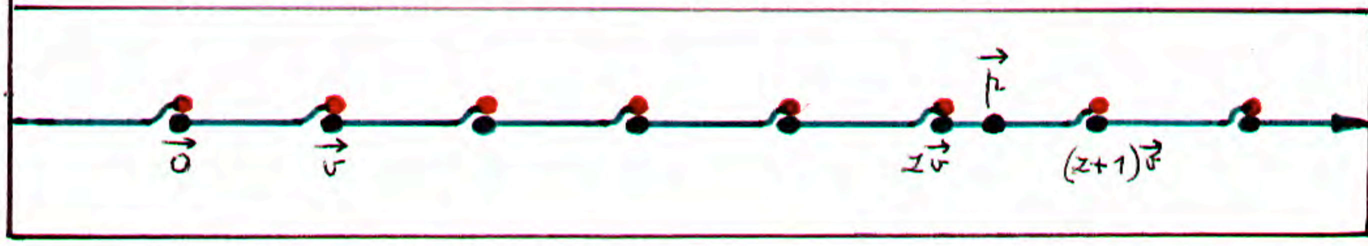
5 Archimède

Si la droite ov est ordonnée par $\vec{o} < \vec{v}$

Alors l'axiome d'Archimède affirme [mm 2, p. 53] :

Pour tout $\vec{p} \in$ ov, il existe un seul $z \in \mathbb{Z}$ tel que

$$z\vec{v} \leqslant \vec{p} < (z+1)\vec{v}$$



Voici un réel d strictement positif

et des segments semi-ouverts de la graduation qu'il définit

segments verts égaux

L'axiome d'Archimède se transfère aussitôt aux réels :

$d \in \mathbb{R}_0^+$

1

Pour tout réel a, il existe un seul $q \in \mathbb{Z}$ tel que

$$q d \leqslant a < (q+1) d$$

Archimède

ou encore

$d \in \mathbb{R}_0^+$

1

Tout réel a s'écrit de manière unique

$$a = q d + r$$

avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{R}^+ : 0 \leqslant r < d$

division archimédienne

Avec les mêmes notations :

3

q est le <u>quotient entier</u> et $r = a - q d$ est le <u>reste</u> de la <u>division archimédienne</u> de a par d

Peut-être n'est-il pas inutile de retranscrire le théorème 1 sous forme quantifiée particulièrement frappante :

1

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall d \in \mathbb{R}_0^+, \exists! q \in \mathbb{Z}, \exists! r \in \mathbb{R}^+ :$$

$$a = dq + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < d$$

division archimédienne

Dans le cas où $a \in \mathbb{Z}$ et $d \in \omega_0$, nous retrouvons la division euclidienne [mm 2, p. 54]

L'ensemble des propriétés des réels acquises jusqu'ici se résume

3

$\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant$ est un champ totalement ordonné, archimédien.

EX42 Pour tout $r \in \mathbb{R}$, il existe un entier strictement plus grand que r

EX43 Pour tout $r \in \mathbb{R}$, il existe un entier strictement plus petit que r

EX44 $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists n \in \omega_0 : \quad \frac{1}{n} < \varepsilon$

EX45 Détermine le plus petit naturel non nul n tel que

$$\frac{1}{n} < 0{,}00025$$

EX46 $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists n \in \omega_0 : \quad \frac{1}{n!} < \varepsilon$

EX47 Détermine un naturel non nul n tel que

$$\frac{1}{n!} < 10^{-10}$$

EX48 Démontre l'équivalence des deux premiers énoncés du théorème 1.
Tu peux éventuellement recourir à la démonstration de la page 55 [mm2]

EX49 Calcule le quotient entier et le reste des divisions de

34.563	par	214	0,076	par	0,05
4,75	par	28	489.014	par	31,25
1256	par	0,125	378,6	par	4923
13,5	par	4,22	0,0001	par	0,00003

EX50

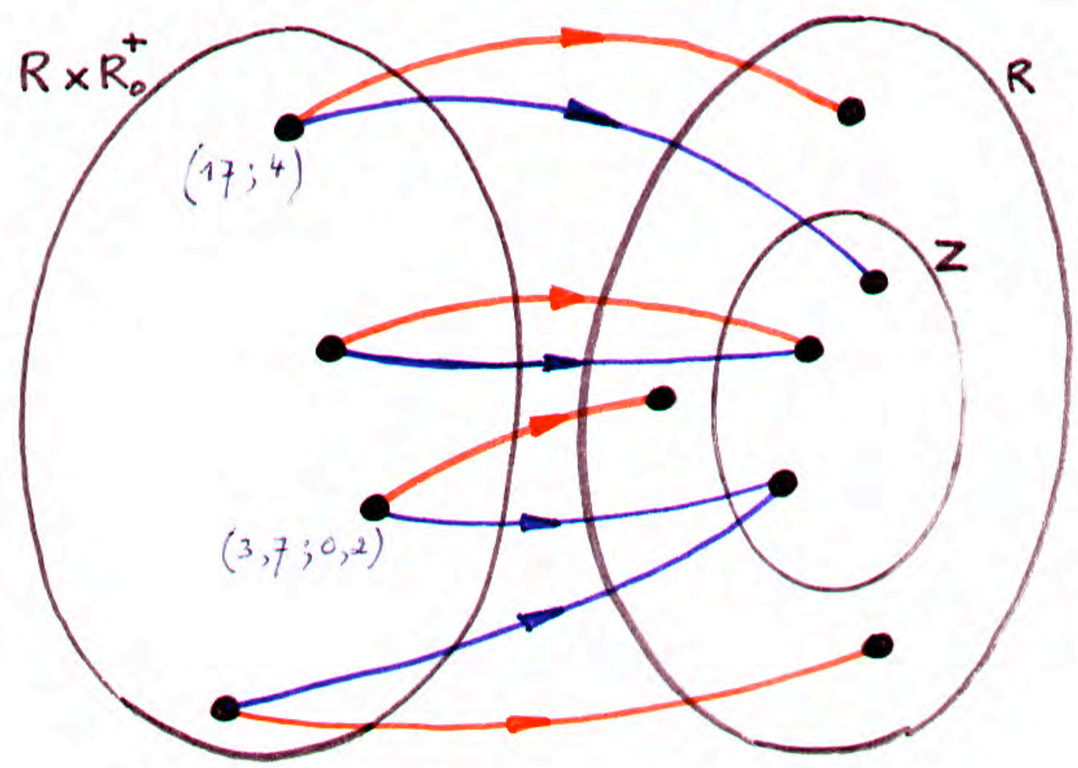
q est le quotient entier et r est le reste de la division de 1350 par 422

⟺

q est le quotient entier et $10^{-2}r$ est le reste de la division de 13,5 par 4,22

EX51 Généralise l'énoncé de l'EX50

EX52



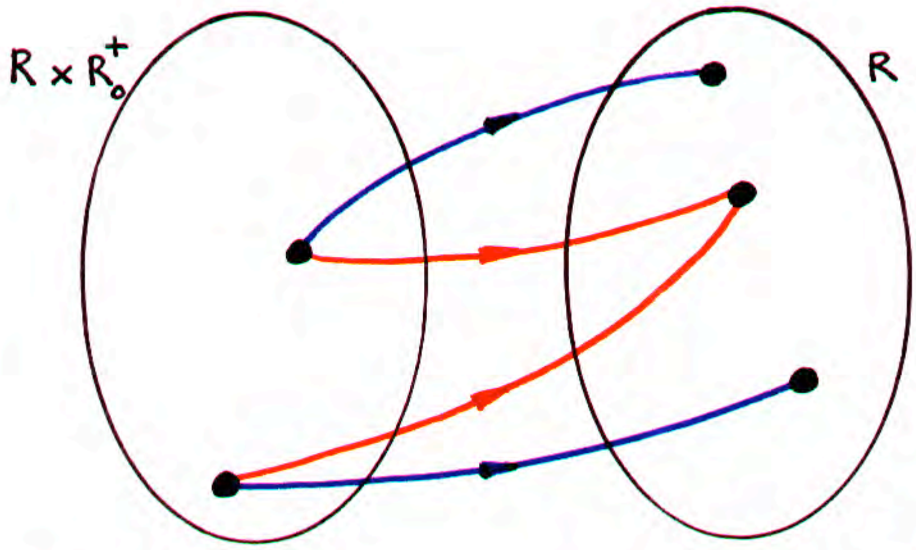
... a comme quotient ...

... a comme quotient entier ...

Marque des réels et des couples de réels compatibles avec ce graphe.

EX53 L'EX précédent ne te suggère-t-il pas un lien entre le quotient et le quotient entier d'un même couple de réels ?

EX54



Cette situation peut-elle se présenter dans le graphe précédent ?

EX55 $\forall r \in \mathbb{R}, \exists!\, z \in \mathbb{Z} : \quad z \leqslant r < z+1$

EX56 Avec les mêmes notations

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} : r \longmapsto z = [r]$ est la fonction "<u>partie entière</u>"

$[r]$ est le plus grand entier plus petit que r.

Marque, approximativement, des nombres compatibles avec ce graphe.

EX57 Calcule

$[5{,}072]$	$f^{-1}\{3\}$
$[5]$	$f^{-1}\{-3\}$
$[\bar{5}{,}072]$	$f^{-1}\{0{,}125\}$
$[-5{,}072]$	$f^{-1}\omega$
$[\bar{5}]$	$f^{-1}\mathbb{R}$

EX58

quotient entier de la division archimédienne de a par d	=	partie entière du quotient de a par d	=	$\left[\frac{a}{d}\right]$

EX59 L'EX précédent fournit la réponse à l'EX53
Réponse, sans utiliser la "partie entière" : le quotient entier de la division archimédienne de a par d est le plus grand entier, plus petit que le quotient de a par d.

EX60 $\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant$ est un champ totalement ordonné, archimédien.

6 Complétude

Axiome de continuité

Dans π :
l'intersection de toute suite binaire infinie (resp. décimale) de segments fermés est <u>singletonne</u>.

[mm 2, p. 76]

La bijection croissante

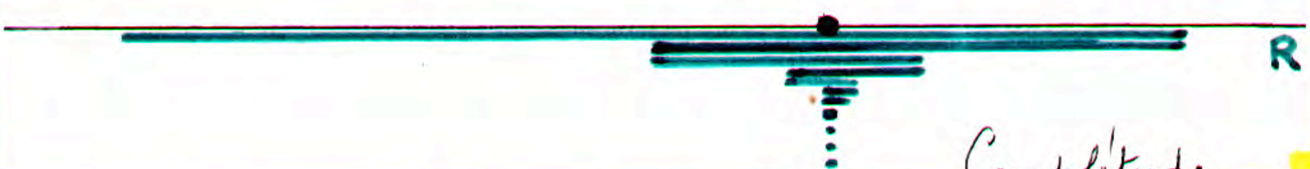
$$D_{0,1}, \leqslant \longrightarrow \mathbb{R}, \leqslant \; : \; \vec{x} \longmapsto \text{abscisse de } \vec{x}$$

permet de traduire cet axiome.

jaune = rouge

2

Dans $\mathbb{R}$:
l'intersection de toute suite binaire infinie (resp. décimale) d'intervalles fermés est <u>singletonne</u>.



Complétude

On exprime cette propriété en disant que $\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant$ est <u>complet</u>.

Le théorème 3 résume les propriétés de la structure $\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant$

3

$\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant$ est un <u>champ</u>
<u>totalement ordonné</u>,
<u>archimédien</u>,
<u>complet</u>.

EX61 Le champ totalement ordonné archimédien $\mathbb{Q},+,\cdot,\leqslant$ n'est pas complet.

Il revient à prouver

□ Il existe une suite binaire d'intervalles fermés de $\mathbb{Q}$ dont l'intersection n'est pas singletonne.

∗ Voici $i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\mathcal{S}$ est une suite binaire infinie d'intervalles fermés de $\mathbb{R}$ dont l'intersection égale $\{i\}$.

Le dessin

schématise les intersections de ces intervalles fermés de $\mathbb{R}$ avec $\mathbb{Q}$. L'intersection de cette suite binaire infinie d'intervalles fermés de $\mathbb{Q}$ est vide. ■

EX62 Fournis une valeur numérique pour i.